# 6. Promjena baza i sličnost

### (6.01) Promjena koordinata vektora

Neka su $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, ..., \boldsymbol{x}_n\}$ i $\mathcal{B}' = \{\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, ..., \boldsymbol{y}_n\}$ baze za $\mathcal{V}$, i neka su $T$ i $P$, redom, pridruženi operator za promjenu baze i matrica za promenu baze, tj. $T(\boldsymbol{y}_i) = \boldsymbol{x}_i$ za svaki $i$, i

$$P = [T]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}'} = [I]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ [\boldsymbol{x}_1]_{\mathcal{B}'} & [\boldsymbol{x}_2]_{\mathcal{B}'} & ... & [\boldsymbol{x}_n]_{\mathcal{B}'} \\ | & | & & | \end{pmatrix}.$$

Tada

- $[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{B}'} = P[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{B}}$ za svaki $\boldsymbol{v} \in \mathcal{V}$.
- $P$ je nesingularna matrica.
- Ni jedna druga matrica se ne može koristiti umjesto $P = [I]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$. $\diamond$

### (6.02) Promjena matričnih koordinata

Neka je $A$ linearni operator na $\mathcal{V}$, i neka su $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}'$ dvije baze za $\mathcal{V}$. Koordinatne matrice $[A]_{\mathcal{B}}$ i $[A]_{\mathcal{B}'}$ su povezane na sljedeći način.

$$[A]_{\mathcal{B}} = P^{-1}[A]_{\mathcal{B}'}P, \qquad \text{gdje je} \qquad P = [I]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$$

matrica za promjenu baze sa $\mathcal{B}$ u $\mathcal{B}'$. Ekvivalentno

$$[A]_{\mathcal{B}'} = Q^{-1}[A]_{\mathcal{B}}Q, \qquad \text{gdje je} \qquad Q = [I]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = P^{-1}$$

matrica za promjenu baze sa $\mathcal{B}'$ u $\mathcal{B}$. $\diamond$

### (6.03) Sličnost

• Za matrice $B_{n\times n}$ i $C_{n\times n}$ kažemo da su <u>*slične matrice*</u> kadgod postoji nesingularna matrica $Q$ takva da $B = Q^{-1}CQ$. Da bi označili da su matrice $B$ i $C$ slične pišemo $B \simeq C$.

• Linearni operator $f : \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ definisan sa $f(C) = Q^{-1}CQ$ zovemo <u>*transformacija sličnosti*</u>. $\diamond$

### (6.04) Očuvanje ranga

Množenje sa nesingularnom matricom ne mijenja rang. $\diamond$

(ova stranica je ostavljena prazna)

(#) Date su dvije baze $\mathcal{B}=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ i $\mathcal{B}'=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\}$ vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$.

Dat je vektor $c$ koji u odnosu na standardnu bazu $\varphi=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ ima koordinate $\begin{pmatrix}-2\\8\\-6\end{pmatrix}$ $\left(c=\begin{pmatrix}-2\\8\\-6\end{pmatrix}\right)$.

Odrediti koordinate vektora $c$ u odnosu na bazu $\mathcal{B}$ (drugim riječima pronaći $[c]_{\mathcal{B}}$) pa poslije toga uz pomoć $[c]_{\mathcal{B}}$ odrediti $[c]_{\mathcal{B}'}$ (koordinate vektora $c$ u odnosu na bazu $\mathcal{B}'$).

Rj. $\varphi=\left\{\underset{e_1}{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}},\underset{e_2}{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}},\underset{e_3}{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}\right\}$

$$\begin{pmatrix}-2\\8\\-8\end{pmatrix}=(-2)e_1+8e_2+(-6)e_3=(-2)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+8\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}-6\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Da bi odredili $[c]_{\mathcal{B}}$ potrebno je pronaći $\alpha$, $\beta$ i $\gamma$ takve da

$$\begin{pmatrix}-2\\8\\-6\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l}\alpha+2\beta-\gamma=-2\\ \alpha+3\beta\phantom{-\gamma}=8\\ 2\alpha-\beta+\gamma=-6\end{array}$$

$$\bar{A}=\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&-1&-2\\1&3&0&8\\2&-1&1&-6\end{array}\right]\underset{III_v+I_v\cdot(-2)}{\overset{II_v+I_v\cdot(-1)}{\sim}}\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&-1&-2\\0&1&1&10\\0&-5&3&-2\end{array}\right]\overset{III_v+II_v\cdot 5}{\sim}\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&-1&-2\\0&1&1&10\\0&0&8&48\end{array}\right]$$

$\Rightarrow$ $8\gamma=48$ $\quad$ $\beta+\gamma=10$ $\quad$ $\alpha+3\beta=8$

$\gamma=6$ $\quad$ $\beta=4$ $\quad$ $\alpha=-4$

Koordinate vektora $c$ u odnosu na bazu $\mathcal{B}$ su $\begin{pmatrix}-4\\4\\6\end{pmatrix}$

tj. $[c]_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}-4\\4\\6\end{pmatrix}$; $-4\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}+6\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\8\\-6\end{pmatrix}=c$

Da bi odredili $[c]_{\mathcal{B}'}$ iz $[c]_{\mathcal{B}}$, kako je

$$c = -4\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

potrebno je svaki od vektora $\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ razložiti preko vektora iz baze $\mathcal{B}' = \left\{\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\}$.

$$\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \Rightarrow \left[\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} \alpha + 2\beta + \gamma = 2 \\ \alpha + \beta = 3 \\ 2\alpha - \gamma = -1 \end{array}$$

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right] \underset{III_v + I_v\cdot(-2)}{\overset{II_v + I_v\cdot(-1)}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & -3 & -5 \end{array}\right] \overset{III_v + II_v\cdot(-4)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -9 \end{array}\right]$$

$\Rightarrow \gamma = -9$

$2\alpha - \gamma = -1$

$2\alpha + 9 = -1$

$\alpha = -5$

$\alpha + \beta = 3$

$\beta = 8$

$$\left[\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix}-5\\8\\-9\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} = 0\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \Rightarrow \left[\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$$

Prema tome

$$c = -4\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} = (-4)\left(1\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right)$$

$$+ 4\left(-5\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} + 8\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} - 9\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right) + 6\left(0\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right)$$

$$= (-24)\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} + 32\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} - 42\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \Rightarrow [c]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix}-24\\32\\-42\end{pmatrix}$$

Provjerimo $\begin{pmatrix}-2\\8\\-6\end{pmatrix} = (-24)\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} + 32\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} - 42\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$.

Da bi smo izbjegli komplikovani račun koji smo dobili u prvom zadatku želimo odrediti matricu $P$ koju ćemo zvati <u>matricu za promjenu baze</u> i koja će imati osobinu

$$\underline{[v]_{\mathcal{B}'} = P[v]_{\mathcal{B}}}.$$

Ako su $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}'$ dvije različite baze vektorskog prostora $V$ matricu za promjenu baze sa $\mathcal{B}$ u $\mathcal{B}'$ računamo po formuli

$$\underline{P = [I]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}}$$

gdje je $I(x) = x$ za $\forall x \in V$.

Ovo slijedi na osnovu ranije navedene teoreme:
Neka je $T \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, V)$ i neka su $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}'$, redom, baze za $\mathcal{U}$ i $V$. Za svako $u \in \mathcal{U}$ imamo

$$\underline{[T(u)]_{\mathcal{B}'} = [T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} [u]_{\mathcal{B}}}.$$

(#) Neka su $\mathcal{B} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ i $\mathcal{B}' = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ baze za $V$ i neka je $P = [I]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ gdje je $I(x) = x$ $\forall x \in V$.
Pokazati da $[v]_{\mathcal{B}'} = P[v]_{\mathcal{B}}$ za $\forall v \in V$.

Rj: Prisjetimo se sljedeće teoreme iz osnova teorije

Neka je $T \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, V)$, i neka su $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}'$ redom baze za $\mathcal{U}$ i $V$.
Tada za $\forall u \in \mathcal{U}$ $[T(u)]_{\mathcal{B}'} = [T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}[u]_{\mathcal{B}}$.

Kako je $I \in \mathcal{L}(V, V)$ sad imamo

$$[v]_{\mathcal{B}'} = [I(v)]_{\mathcal{B}'} = [I]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}[v]_{\mathcal{B}} = P[v]_{\mathcal{B}}$$

q.e.d.

**Napomena:**

Ako je $T \in \mathcal{L}(V, V)$ definisan sa $T(y_i) = x_i$ $\forall i$ gdje su $\mathcal{B} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ i $\mathcal{B}' = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ baze za $V$, možemo razmišljati o $\mathcal{B}$ kao o staroj bazi, a o $\mathcal{B}'$ kao o novoj bazi. Tada operator za promjenu baze $T$ djeluje sa

T(nova baza) = stara baza

dok matrica za promjenu baze $P$ djeluje sa

nove koordinate = P(stare koordinate)

Iz ovog razloga, $T$ treba tumačiti kao operator za promjenu baze sa $\mathcal{B}'$ u $\mathcal{B}$, dok $P$ zovemo matrica za promjenu baze sa $\mathcal{B}$ u $\mathcal{B}'$.

# Za prostor $\mathcal{P}_2$ svih polinoma stepena 2 ili manje odrediti matricu $P$ za promjenu baze sa $\mathcal{B}$ u $\mathcal{B}'$ gdje

$$\mathcal{B} = \{1, t, t^2\} \quad ; \quad \mathcal{B}' = \{1, 1+t, 1+t+t^2\}$$

pa poslije toga pronađi koordinate polinoma (vektora) $g(t) = 3 + 2t + 4t^2$ u odnosu na $\mathcal{B}'$.

Rj.

Matrica $P$ za promjenu baze sa $\mathcal{B}$ u $\mathcal{B}'$ ima osobinu da

$$\forall v \in V \qquad [v]_{\mathcal{B}'} = P\,[v]_{\mathcal{B}}$$

Tražimo je na sljedeći način

$$P = [I]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ [x_1]_{\mathcal{B}'} & [x_2]_{\mathcal{B}'} & \dots & [x_n]_{\mathcal{B}'} \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

gdje su $\mathcal{B} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ i $\mathcal{B}' = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ baze za $V$

Kako je $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$ baza za prostor $\mathcal{P}_2$ to prema ispisanoj teoriji, matricu $P$ za promjenu baze sa $\mathcal{B}$ u $\mathcal{B}'$ računamo po formuli

$$P = \begin{pmatrix} | & | & | \\ [1]_{\mathcal{B}'} & [t]_{\mathcal{B}'} & [t^2]_{\mathcal{B}'} \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

gdje je $\mathcal{B}' = \{1, 1+t, 1+t+t^2\}$.

Da bi odredili $[1]_{\mathcal{B}'}$ potrebno je naći $\alpha, \beta$ i $\gamma$ t.d.

$$1 = \alpha \cdot 1 + \beta \cdot (1+t) + \gamma (1+t+t^2)$$

Odmah vidimo da je $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ pa

$$[1]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Da bi odredili $[t]_{\mathcal{B}'}$ potrebno je naći $\alpha, \beta$ i $\gamma$ t.d.

$$t = \alpha \cdot 1 + \beta(1+t) + \gamma(1+t+t^2),$$

Vidimo da je $\alpha = -1, \beta = 1, \gamma = 0$ pa

$$[t]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Da bi odredili $[t^2]_{\mathcal{B}'}$ potrebno je pronaći $\alpha, \beta$ i $\gamma$ t.d.

$$t^2 = \alpha \cdot 1 + \beta(1+t) + \gamma(1+t+t^2)$$

Rješenje $\alpha = 0, \beta = -1, \gamma = 1$

Prema tome $P = \begin{pmatrix} | & | & | \\ [1]_{\mathcal{B}'} & [t]_{\mathcal{B}'} & [t^2]_{\mathcal{B}'} \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Koordinate vektora $g = g(t) = 3 + 2t + 4t^2$ u odnosu na bazu $\mathcal{B}'$ su

$$[g]_{\mathcal{B}'} = P[g]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Da bi nezavisno od računa provjerili da su koordinate tačne, trebamo provjeriti da li je $g(t) = 1 \cdot (1) - 2(1+t) + 4(1+t+t^2)$.

(#) Posmatrajmo matricu $M_{n\times n}$ kao linearni operator na $\mathbb{R}^n$ definisan sa $M(v) = Mv$ (množenje matrice sa vektorom). Ako je $\mathcal{S}$ standardna baza za $\mathbb{R}^n$, i ako je $\mathcal{S}' = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ neka druga baza, opisati $[M]_{\mathcal{S}}$ i $[M]_{\mathcal{S}'}$.

Rj: Standardna baza za $\mathbb{R}^n$ je $\mathcal{S} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

$$[M]_{\mathcal{S}} = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ [M(e_1)]_{\mathcal{S}} & [M(e_2)]_{\mathcal{S}} & \dots & [M(e_n)]_{\mathcal{S}} \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

$$M(e_1) = Me_1 = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2n} \\ \vdots & & & \\ m_{n1} & m_{n2} & \dots & m_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} \\ m_{21} \\ \vdots \\ m_{n1} \end{bmatrix} = M_{*1}$$

$$M(e_j) = Me_j = M_{*j} \quad \Rightarrow \quad [M]_{\mathcal{S}} = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ M_{*1} & M_{*2} & \dots & M_{*n} \\ | & | & & | \end{pmatrix} = M.$$

Da bi pronašli $[M]_{\mathcal{S}'}$ iskoristićemo teoremu:

<u>Ako je $A$ linearni operator na $V$ i $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}'$ dvije baze za $V$ tada</u>

$$\underline{[A]_{\mathcal{B}} = P^{-1} [A]_{\mathcal{B}'} P \quad \text{gdje} \quad P = [I]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}}$$

$$\underline{[A]_{\mathcal{B}'} = Q^{-1} [A]_{\mathcal{B}} Q \quad \text{gdje} \quad Q = [I]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = P^{-1}}$$

U našem slučaju:

$$[M]_{\mathcal{S}'} = Q^{-1} [M]_{\mathcal{S}} Q = Q^{-1} M Q \quad \text{gdje je}$$

$$Q = [I]_{\mathcal{S}'\mathcal{S}} = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ [g_1]_{\mathcal{S}} & [g_2]_{\mathcal{S}} & \dots & [g_n]_{\mathcal{S}} \\ | & | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ g_1 & g_2 & \dots & g_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}.$$

Zaključak: Matrice $M$ i $Q^{-1}MQ$ predstavljaju iste linearne operatore (naime $M$), ali u odnosu na dvije različite baze (naime $\mathcal{S}$ i $\mathcal{S}'$). Tako da, kad razmatramo osobine od $M$ (kao linearnog operatora) dozvoljeno je zamjeniti $M$ sa $Q^{-1}MQ$. Kadpod struktura od $M$ zamuti osobine operatora, tražimo bazu za $\mathcal{S}' = \{Q_{*1}, Q_{*2}, \dots, Q_{*n}\}$ (ili, ekvivalentno, nesingularnu matricu $Q$) takvu da $Q^{-1}MQ$ ima jednostavniju strukturu. Ovo je važna tema kroz linearnu algebru i teoriju matrica.

(#) Posmatrajmo linearni operator $A(x,y)=(y,-2x+3y)$ definisan na $\mathbb{R}^2$ zajedno sa dvije baze

$$\varphi=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\} \quad i \quad \varphi'=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\}.$$

Prvo izračunati matricu koordinata $[A]_\varphi$ kao i matricu $Q$ za promjenu baze sa $\varphi'$ u $\varphi$, pa onda iskoristiti ove dvije matrice da bi odredili $[A]_{\varphi'}$.

Rj:

Neka je $A$ linearni operator na $V$, i neka su $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}'$ dvije baze za $V$. Matrice koordinata $[A]_{\mathcal{B}}$ i $[A]_{\mathcal{B}'}$ su povezani na sljedeći način

$$\underline{[A]_{\mathcal{B}}=P^{-1}[A]_{\mathcal{B}'}P, \quad \text{gdje je} \quad P=[I]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}}$$

matrica za promjenu baze sa $\mathcal{B}$ u $\mathcal{B}'$.

$$[A]_\varphi=\begin{pmatrix} | & | \\ [A(1,0)]_\varphi & [A(0,1)]_\varphi \\ | & | \end{pmatrix} \overset{(*)}{=} \begin{bmatrix}0 & 1\\-2 & 3\end{bmatrix}$$

$$A(1,0)=(0,-2)=0\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \Rightarrow [A(1,0)]_\varphi=\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}$$

$$A(0,1)=(1,3)=1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \Rightarrow [A(0,1)]_\varphi=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} \quad \ldots(*)$$

$$Q=[I]_{\varphi'\varphi}=\begin{pmatrix} | & | \\ \left[\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right]_\varphi & \left[\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right]_\varphi \\ | & | \end{pmatrix}$$

Tražimo $\alpha$ i $\beta$ t.d.

$$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \alpha=\beta=1 \Rightarrow \left[\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right]_\varphi=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

Ponovo tražimo $\alpha$ i $\beta$ t.d.

$$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \alpha=1,\ \beta=2 \qquad \left[\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right]_{\varphi}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

Prema tome $Q=\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 2\end{bmatrix}$.

Prema teoriji linearne algebre

$$\underline{[A]_{\varphi'}=Q^{-1}[A]_{\varphi}Q \quad \text{gdje je} \quad Q=[I]_{\varphi'\varphi}}$$

$$[A]_{\varphi'}=Q^{-1}[A]_{\varphi}Q=Q^{-1}\begin{pmatrix}0 & 1\\-2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 2\end{pmatrix}=Q^{-1}\begin{pmatrix}1 & 2\\1 & 4\end{pmatrix}$$

$$Q=\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 2\end{bmatrix}, \quad \det Q=\begin{vmatrix}1 & 1\\1 & 2\end{vmatrix}=1$$

$$Q_{11}=2 \qquad Q_{21}=-1 \qquad Q_{kof}=\begin{bmatrix}2 & -1\\-1 & 1\end{bmatrix}$$

$$Q_{12}=-1 \qquad Q_{22}=1 \qquad Q_{adj}=\begin{bmatrix}2 & -1\\-1 & 1\end{bmatrix}$$

$$Q^{-1}=\frac{1}{\det Q}Q_{adj}=\begin{bmatrix}2 & -1\\-1 & 1\end{bmatrix}$$

II način - pomoću Gauss-Jordanovih eliminacija

$$[A]_{\varphi'}=\begin{bmatrix}2 & -1\\-1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\1 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}.$$

Napomena: Za dati linearni operator A, problem pronalaženja baze takve da matrica koordinata linearnog operatora bude što je moguće jednostavnija (npr. dijagonalna) je fundamentalna tema iz teorije matrica.

(#) Neka je $A(x,y,z)=(x+2y-z,\ -y,\ x+7z)^T$ linearni operator na $\mathbb{R}^3$.

(a) Odrediti $[A]_{\mathcal{S}}$ gdje je $\mathcal{S}$ standardna baza.

(b) Odrediti $[A]_{\mathcal{S}'}$ kao i nesingularnu matricu $Q$ takvu da $[A]_{\mathcal{S}'} = Q^{-1}[A]_{\mathcal{S}}Q$ za $\mathcal{S}'=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$.

Rj:

a) Standardna baza za $\mathbb{R}^3$ je $\mathcal{S}=\left\{\underset{e_1}{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}},\underset{e_2}{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}},\underset{e_3}{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}\right\}$.

$$[A]_{\mathcal{S}}=\begin{pmatrix} | & | & | \\ [A(e_1)]_{\mathcal{S}} & [A(e_2)]_{\mathcal{S}} & [A(e_3)]_{\mathcal{S}} \\ | & | & | \end{pmatrix}.$$

$$A(e_1)=A(1,0,0)=(1,0,1)^T=e_1+e_3 \Rightarrow [A(e_1)]_{\mathcal{S}}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$A(e_2)=A(0,1,0)=(2,-1,0)^T=2e_1-e_2 \Rightarrow [A(e_2)]_{\mathcal{S}}=\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$$

$$A(e_3)=A(0,0,1)=(-1,0,7)^T=-e_1+7e_3 \Rightarrow [A(e_3)]_{\mathcal{S}}=\begin{pmatrix}-1\\0\\7\end{pmatrix}$$

$$[A]_{\mathcal{S}}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 7\end{pmatrix}$$

b)

Znamo da: Ako je $A$ linearni operator na $V$, i $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}'$ dvije baze za $V$ tada

$$[A]_{\mathcal{B}'}=Q^{-1}[A]_{\mathcal{B}}Q \quad \text{gdje} \quad Q=[I]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$$

$$[I]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}=\begin{pmatrix} | & | & | \\ \left[I\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}} & \left[I\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}} & \left[I\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}} \\ | & | & | \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} | & | & | \\ \left[\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}} & \left[\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}} & \left[\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}} \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad Q=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

$$[A]_{\varphi'} = \begin{pmatrix} | & | & | \\ \left[A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right]_{\varphi'} & \left[A\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right]_{\varphi'} & \left[A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right]_{\varphi'} \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

Odavde vidimo da bi odredili $[A]_{\varphi'}$ možda je lakše odrediti $Q^{-1}$ i onda izmnožiti $Q^{-1}[A]_{\varphi}Q$.

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(najlakši način da odredimo $Q^{-1}$ je pomoću Gauss-Jordanove eliminacije)

$$[A]_{\varphi'} = Q^{-1}[A]_{\varphi}Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[A]_{\varphi'} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & -9 \\ 1 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

(7) Pokazati da dvije slične matrice moraju biti koordinatne matrice za isti linearni operator.

R:

Neka su $C$ i $B$ dvije slične matrice tj.

$$C \simeq B \Rightarrow \exists Q \text{ t.d. } C = Q^{-1} B Q.$$

Posmatrajmo linearni operator $A$ definisan sa

$$A(v) = Bv \quad \text{za } \forall v$$

Ovdje ćemo iskoristiti sljedeću teoremu:

<u>Ako je $A$ linearni operator na $V$ i ako su $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}'$ dvije baze za $V$ tada</u>

$$[A]_{\mathcal{B}} = P^{-1} [A]_{\mathcal{B}'} P \quad \text{gdje} \quad P = [I]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$$

$$[A]_{\mathcal{B}'} = Q^{-1} [A]_{\mathcal{B}} Q \quad \text{gdje} \quad Q = [I]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$$

Neka je $\mathcal{S} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ standardna baza za $\mathbb{R}^n$. Tada

$$[A]_{\mathcal{S}} = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ [A(e_1)]_{\mathcal{S}} & [A(e_2)]_{\mathcal{S}} & \cdots & [A(e_n)]_{\mathcal{S}} \\ | & | & & | \end{pmatrix} = B$$

Neka je $\mathcal{B}' = \{Q_{*1}, Q_{*2}, \dots, Q_{*n}\}$ baza čiji su elementi kolone matrice $Q$. Primjetimo da je

$$[I]_{\mathcal{B}'\mathcal{S}} = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ [Q_{*1}]_{\mathcal{S}} & [Q_{*2}]_{\mathcal{S}} & \cdots & [Q_{*n}]_{\mathcal{S}} \\ | & | & & | \end{pmatrix} = Q \quad \dots(*)$$

Dalje primjetimo da prema navedenoj teoremi

$$[A]_{\mathcal{B}'} = [I]_{\mathcal{B}'\varphi}^{-1}\,[A]_{\varphi}\,[I]_{\mathcal{B}'\varphi} \overset{(*)}{=}$$

$$= Q^{-1} B Q = C \,;$$

tj. $C = [A]_{\mathcal{B}'}$.

Kako je još $B = [A]_{\varphi}$ to su obe matrice $B$ i $C$ koordinatne matrice koje predstavljaju linearni operator $A$. Drugim riječima, slične matrice predstavljaju isti linearni operator.

Linearni operator $f: Mat_{n\times n}(\mathbb{R}) \to Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ definisan sa $f(C) = Q^{-1}CQ$ zovemo <u>transformacija sličnosti</u>.

Transformacija sličnosti koja je invarijantna zovemo <u>invarijanta sličnost</u>.
(transformacija daje isti rezultat za sve slične matrice)

(#) Trag kvadratne matrice $C_{n\times n}$ je definisan kao suma dijagonalnih elemenata

$$trag(C) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii}.$$

Pokazati da je trag invarijantna sličnost i objasniti zašto ima smisla govoriti o <u>tragu linearnog operatora</u> bez obzira o kojoj je bazi riječ. Poslije ovoga odrediti trag linearnog operatora na $\mathbb{R}^2$ koji je definisan sa

$$A(x,y) = (y, -2x+3y).$$

Rj. Za proizvoljne dvije matrice $B$ i $C$ za koje postoji proizvod $BC$ i $CB$ provjerimo da li

$$trag(BC) = trag(CB)?$$

$$trag(BC) = trag\left(\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nm} \end{bmatrix}\right) =$$

$$= (b_{11}c_{11} + b_{12}c_{21} + \ldots + b_{1n}c_{n1}) + (b_{21}c_{12} + b_{22}c_{22} + \ldots + b_{2n}c_{2n}) +$$

$$+ \ldots + (b_{m1}c_{m1} + b_{m2}c_{m2} + \ldots + b_{mn}c_{nm}) =$$

$$= (c_{11} b_{11} + c_{21} b_{21} + \dots + c_{n1} b_{n1}) + \dots + (c_{n1} b_{m1} + c_{m2} b_{m2} + \dots + c_{mn} b_{mn})$$

$$\overset{\text{pregrupirajmo elemente}}{=} (c_{11} b_{11} + c_{12} b_{21} + \dots + c_{1m} b_{m1}) + \dots + (c_{n1} b_{1n} + c_{n2} b_{2n} + \dots + c_{nm} b_{mn})$$

$$= \operatorname{trag}\left( \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix} \right) = \operatorname{trag}(CB)$$

Sad imamo

$$\operatorname{trag}(Q^{-1} \underbrace{CQ}_{\text{matrica}}) = \operatorname{trag}(CQQ^{-1}) = \operatorname{trag}(C)$$

Prema tome sve slične matrice imaju isti trag. Drugim riječima trag je invarijanta sličnosti.

Već smo pokazali da slične matrice predstavljaju koordinate izbora linearnog operatora, razlika je samo u izboru baze. Prema tome $\operatorname{trag}([A]_{\mathcal{B}})$, za linearni operator $A$, je uvijek isti broj, bez obzira na izbor baze $\mathcal{B}$.

Linearni operator $A(x,y) = (y, -2x+3y)$ smo već imali u jednom primjeru, gdje smo za $\varphi = \left\{ \binom{1}{0}, \binom{0}{1} \right\}$ i $\varphi' = \left\{ \binom{1}{1}, \binom{1}{2} \right\}$ odredili

$$[A]_{\varphi} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad [A]_{\varphi'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vidimo da je $\operatorname{trag}([A]_{\varphi}) = \operatorname{trag}([A]_{\varphi'}) = 3$. Kako je $\operatorname{trag}([A]_{\mathcal{B}}) = 3$ za sve $\mathcal{B}$, možemo zaključiti

$$\operatorname{trag}(A) = 3.$$

④ Objasniti zašto je rang invarijantna sličnost.

Rj: Drugim riječima, pokažimo da sve slične matrice imaju isti rang.

Ovdje ćemo iskoristiti teoremu

<u>Množenje sa nesingularnom matricom ne mijenja rang.</u>

Neka je $A_{n\times n}$ matrica takva da $rang(A)=r$.
Za proizvoljnu matricu $B$ koja je slična sa matricom $A$ imamo da $\exists Q, Q^{-1}$ t.d. $A=Q^{-1}BQ$

Množenje sa nesingularnom matricom ne mijenja rang $\Rightarrow$ $rang(B)=r$

Prema tome sve slične matrice imaju isti rang.
Rang je invarijantna sličnost.

q.e.d.

(#) Objasniti zašto je transformacija sličnosti tranzitivna u smislu da $A \simeq B$ i $B \simeq C$ povlači $A \simeq C$.

Rj.

$$A \simeq B \Rightarrow \exists Q, Q^{-1} \text{ t.d. } A = Q^{-1} B Q$$

$$B \simeq C \Rightarrow \exists R, R^{-1} \text{ t.d. } B = R^{-1} C R$$

Sad imamo

$$A = Q^{-1} B Q = Q^{-1} (R^{-1} C R) Q = (Q^{-1} R^{-1}) C (RQ) =$$

$$= (RQ)^{-1} C (RQ) \Rightarrow A \simeq C$$

q.e.d.

# Neka su $A=\begin{pmatrix}1&2&0\\3&1&4\\0&1&5\end{pmatrix}$ i $\mathcal{B}=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right\}$.

Posmatrajmo matricu $A$ kao linearni operator na $\mathbb{R}^3$ koja je data pomoću matričnog množenja $A(x)=Ax$.

Odrediti $[A]_{\mathcal{B}}$.

Rj.:

$$[A]_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix} | & | & | \\ \left[A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}} & \left[A\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}} & \left[A\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}} \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

Lakši način da odredimo $[A]_{\mathcal{B}}$ je da iskoristimo sljedeću teoremu:

<u>Ako je $A$ linearni operator na $V$, i $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}'$ dvije baze za $V$ tada</u>

$$\underline{[A]_{\mathcal{B}}=P^{-1}[A]_{\mathcal{B}'}P \quad \text{gdje} \quad P=[I]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}}$$

$$\underline{[A]_{\mathcal{B}'}=Q^{-1}[A]_{\mathcal{B}}Q \quad \text{gdje} \quad Q=[I]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}}$$

Pa neka je $\mathcal{S}$ standardna baza za $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{S}=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$.

$$[A]_{\mathcal{S}}=\begin{pmatrix} | & | & | \\ \left[A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right]_{\mathcal{S}} & \left[A\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right]_{\mathcal{S}} & \left[A\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right]_{\mathcal{S}} \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

$$\boxed{[A]_{\mathcal{B}}=P^{-1}[A]_{\mathcal{S}}P, \quad P=[I]_{\mathcal{B}\mathcal{S}}}$$

$$A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&0\\3&1&4\\0&1&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\3\\0\end{bmatrix} \dots \Rightarrow [A]_{\mathcal{S}}=\begin{pmatrix}1&2&0\\3&1&4\\0&1&5\end{pmatrix}$$

$$P=[I]_{\mathcal{B}\mathcal{S}}=\left[\left[\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right]_{\mathcal{S}} \; \left[\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\right]_{\mathcal{S}} \; \left[\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right]_{\mathcal{S}}\right]=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&2\\1&2&3\end{bmatrix}.$$

Kako je $[A]_{\mathcal{B}} = P^{-1}[A]_{\varphi}P$ gdje je $P=[I]_{\mathcal{B}\varphi}$,

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad P^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

← OVU MATRICU ODREDITI SAMI UZ POMOĆ GAUSS-JORDANOVIH ELIMINACIJA

$$[A]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 5 & -1 & 3 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -3 & -7 \\ 7 & 9 & 12 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

traženo rješenje

# Pokazati da su $C = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}$ slične matrice i odrediti nesingularnu matricu $Q$ takvu da $C = Q^{-1}BQ$.

Rj.: Za matrice $B_{n\times n}$ i $C_{n\times n}$ kažemo da su <u>slične matrice</u> kadgod postoji nesingularna matrica $Q$ takva da $B = Q^{-1}CQ$. Pišemo $B \simeq C$ da bi označili da su $B$ i $C$ slične.

Iskoristit ćemo sljedeću teoremu:

<u>Ako je $A$ linearni operator na $\mathcal{V}$ i ako su $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}'$ dvije baze za $\mathcal{V}$ tada</u>

$$\underline{[A]_{\mathcal{B}} = P^{-1}[A]_{\mathcal{B}'}P \quad \text{gdje} \quad P = [I]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}}$$

$$\underline{[A]_{\mathcal{B}'} = Q^{-1}[A]_{\mathcal{B}}Q \quad \text{gdje} \quad Q = [I]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}}$$

Posmatrajmo linearni operator $T$ definisan sa $T(x) = Bx$. Tada

$$[T]_{\mathcal{S}} = \begin{pmatrix} [T(e_1)]_{\mathcal{S}} & [T(e_2)]_{\mathcal{S}} \end{pmatrix}$$

gdje je $\mathcal{S}$ standardna baza u $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \{e_1, e_2\}$

$$\Rightarrow \quad [T]_{\mathcal{S}} = B$$

Neka je $\mathcal{S}'$ neka druga baza za $\mathcal{V}$. Prema navedenoj teoremi

$$[T]_{\mathcal{S}'} = P^{-1}[T]_{\mathcal{S}}P \quad \text{gdje} \quad P = [I]_{\mathcal{S}'\mathcal{S}}.$$

Trebamo naći bazu $\varphi'$ takvu da

$$[T]_{\varphi'} = C = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Pa neka je $\varphi' = \{u, v\} = \left\{ \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right\}$

$$[T]_{\varphi'} = \begin{pmatrix} | & | \\ \left[T\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}\right]_{\varphi'} & \left[T\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\right]_{\varphi'} \\ | & | \end{pmatrix}$$

$$T(u) = Bu = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$$T(v) = Bv = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 6u + 4v = 6\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} -2u_1 - 3u_2 &= 4u_1 + 3v_1 \\ 6u_1 + 10u_2 &= 4u_2 + 3v_2 \\ \hline -6u_1 - 3u_2 &= 3v_1 \\ 6u_1 + 6u_2 &= 3v_2 \\ \hline \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -2v_1 - 3v_2 &= 6u_1 + 4v_1 \\ 6v_1 + 10v_2 &= 6u_2 + 4v_2 \\ \hline -6v_1 - 3v_2 &= 6u_1 \quad /:(-3) \\ 6v_1 + 6v_2 &= 6u_2 \quad /:(6) \\ \hline 2v_1 + v_2 &= -2u_1 \\ v_1 + v_2 &= u_2 \end{aligned}$$

...

ZAVRŠIT ZA VJEŽBU

$u_1 = 2$, $u_2 = -1$, $v_1 = -3$, $v_2 = 2$ ), što zadovoljava date jednakosti.

Prema tome $\quad C = Q^{-1} B Q \quad$ gdje je $Q = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$(Q = [I]_{\varphi'\varphi})$.

$$\underbrace{[T]_{\varphi'}}_{C} = [I]_{\varphi'\varphi}^{-1} \underbrace{[T]_{\varphi}}_{B} [I]_{\varphi'\varphi}$$

(#) Neka je $\lambda$ skalar takav da je $(C-\lambda I)_{n\times n}$ singularna matrica.

(a) Ako je $B \simeq C$, dokazati da $(B-\lambda I)$ je također singularna.

(b) Dokazati da $(B-\lambda_i I)$ je singularna kadgod je $B_{n\times n}$ slična sa $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$

Rj: Kada je neka matrica singularna?

Matrica $A_{n\times n}$ je nesingularna ako je invertibilna. Ako matrica $A$ nema inverznu matricu ona je singularna matrica. Drugim riječima ako je $rang(A_{n\times n}) < n$, matrica $A$ je nesingularna.

U ovom zadatku ćemo iskoristiti teoremu koja kaže:

Množenje sa nesingularnom matricom ne mijenja rang.

a) $B \simeq C \Rightarrow \exists Q, Q^{-1}$ t.d. $B = Q^{-1} C Q$

Kako je $(C-\lambda I)_{n\times n}$ nesingularna matrica to je $rang(C-\lambda I) < n$

$$B - \lambda I = Q^{-1} C Q - \lambda Q^{-1} Q = Q^{-1}(C - \lambda I) Q$$

Kako množenje sa nesingularnom matricom ne mijenja rang to je $rang(B-\lambda I) < n$ tj.

$B - \lambda I$ je također singularna matrica

q.e.d.

b) Neka je

$B \simeq D$ tj. $\exists Q, Q^{-1}$ t.d. $B = Q^{-1} D Q$

gdje je $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$

Sad imamo

$$B - \lambda_i I = Q^{-1} D Q - \lambda_i Q^{-1} Q = Q^{-1} (D - \lambda_i I) Q$$

$$= Q^{-1} \left( \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} - \lambda_i \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \right) Q$$

gdje je neki od $\lambda_i \in \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$.

Odavde vidimo da je $rang(D - \lambda_i I) < n$.

Kako množenje sa nesingularnom matricom ne mijenja rang to je $rang(B - \lambda_i I) < n$.

Drugim riječima

$B - \lambda_i I$ je singularna matrica.

q.e.d.

(#) Neka je $V$ vektorski prostor u kojem su date dvije različite baze $\mathcal{B}=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$ i $\mathcal{B}'=\{y_1,y_2,\dots,y_n\}$. Neka su $T$ i $I$ linearni operatori definisani sa

$$T(y_i)=x_i \quad \text{za } i=1,2,\dots,n$$
$$I(x)=x \quad \text{za } \forall x\in V.$$

Pokazati da je $P:=[I]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}=[T]_{\mathcal{B}}=[T]_{\mathcal{B}'}$.

($T$ zovemo <u>operator za promjenu baze</u>, a matrica $P=[I]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ <u>matrica za promjenu baze</u>).

Rj. Iz teorije znamo
$$[T]_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix} | & | & & | \\ [T(x_1)]_{\mathcal{B}} & [T(x_2)]_{\mathcal{B}} & \dots & [T(x_n)]_{\mathcal{B}} \\ | & | & & | \end{pmatrix}.$$

$\forall x_i\in\mathcal{B}\ \exists!\ \alpha_{ji}$ $\quad x_i=\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ji}y_j$ pa je

$$T(x_i)=T\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ji}y_j\right)=\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ji}T(y_j)=\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ji}x_j$$

što znači da $[x_i]_{\mathcal{B}'}=[T(x_i)]_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}\alpha_{ji}\\ \alpha_{ji}\\ \vdots\\ \alpha_{ji}\end{pmatrix}$.

Pa je
$$[T]_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} | & | & & | \\ [T(y_1)]_{\mathcal{B}'} & [T(y_2)]_{\mathcal{B}'} & \dots & [T(y_n)]_{\mathcal{B}'} \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

tj. $[T]_{\mathcal{B}}=[T]_{\mathcal{B}'}$. Kako je $[I]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}=\begin{pmatrix} | & | & & | \\ [I(x_1)]_{\mathcal{B}'} & [I(x_2)]_{\mathcal{B}'} & \dots & [I(x_n)]_{\mathcal{B}'} \\ | & | & & | \end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix} | & | & & | \\ [x_1]_{\mathcal{B}'} & [x_2]_{\mathcal{B}'} & \dots & [x_n]_{\mathcal{B}'} \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$ to je $P=[I]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}=[T]_{\mathcal{B}}=[T]_{\mathcal{B}'}$

q.e.d.

\# Neka su $\mathcal{B}=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$ i $\mathcal{B}'=\{y_1,y_2,\dots,y_n\}$ baze za $V$ i neka je $P=[I]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ gdje je $I(x)=x$ $\forall x\in V$. Pokazati da je $P$ nesingularna matrica.

Rj. Prisjetimo se sljedeće teoreme:

Ako je $T\in\mathcal{L}(U,U)$ invertibilna u smislu da $TT^{-1}=T^{-1}T=I$ za neko $T^{-1}\in\mathcal{L}(U,U)$ tada za svaku bazu $\mathcal{B}$ od $U$

$$[T^{-1}]_{\mathcal{B}}=[T]_{\mathcal{B}}^{-1}$$

Posmatrajmo linearni operator $T$ definisan sa $T(y_i)=x_i$ i pokažimo da $[T]_{\mathcal{B}}=[I]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}=P$.

Znamo da za $\forall x_i\in\mathcal{B}$ $\exists!\,\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ t.d. $x_i=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j y_j$

$$\Rightarrow T(x_i)=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j T(y_j)=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j x_j \Rightarrow [x_i]_{\mathcal{B}'}=[T(x_i)]_{\mathcal{B}}$$

$$\Rightarrow [T]_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix} | & | & & | \\ [T(x_1)]_{\mathcal{B}} & [T(x_2)]_{\mathcal{B}} & \dots & [T(x_n)]_{\mathcal{B}} \\ | & | & & | \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} | & | & & | \\ [x_1]_{\mathcal{B}'} & [x_2]_{\mathcal{B}'} & \dots & [x_n]_{\mathcal{B}'} \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} | & | & & | \\ [I(x_1)]_{\mathcal{B}'} & [I(x_2)]_{\mathcal{B}'} & \dots & [I(x_n)]_{\mathcal{B}'} \\ | & | & & | \end{pmatrix}=[I]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}=P$$

Kako je $T$ invertibilna (u stvari $T^{-1}(x_i)=y_i$) i zbog navedene teoreme $[T^{-1}]_{\mathcal{B}}=[T]_{\mathcal{B}}^{-1}=P^{-1}$

$\Rightarrow \exists P^{-1} \Rightarrow P$ je nesingularna matrica. q.e.d.

(#) Neka su $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}'$ dvije baze za $V$. Pokazati da je matrica $P$ sa osobinom

$$[v]_{\mathcal{B}'} = P[v]_{\mathcal{B}} \quad \text{za } \forall v \in V$$

jedinstvena.

Rj.: Ako bi postojala još jedna matrica $W$ sa osobinom

$$[v]_{\mathcal{B}'} = W[v]_{\mathcal{B}} \quad \text{za } \forall v \in V$$

tada bi imali da je

$$(P-W)[v]_{\mathcal{B}} = 0 \quad \text{za } \forall v \in V$$

Ako za $v$ uzmemo vektore iz baze $\mathcal{B} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ kako je $[x_i]_{\mathcal{B}} = e_i$ imamo

$$(P-W)e_i = 0 \quad \text{za } \forall i \quad \Rightarrow \quad P-W=0$$

$$P = W$$

Matrica $P$ je jedinstvena.

q.e.d.

## Zadaci za vježbu

1. Neka je $T$ linearni operator $T(x,y)=(-7x-15y,\ 6x+12y)$. Odrediti bazu $\mathcal{B}$ takvu da $[T]_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}$, i odrediti matrica $Q$ takvu da $[T]_{\mathcal{B}}=Q^{-1}[T]_{\mathcal{S}}Q$, gdje je $\mathcal{S}$ standardna baza.

2. Posmatrajući operator rotacije $P(x,y)=(x\cos\theta-y\sin\theta,\ x\sin\theta+y\cos\theta)$ pokazati da su matrice

$$R=\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\ \sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix} \quad i \quad D=\begin{pmatrix}e^{i\theta}&0\\0&e^{-i\theta}\end{pmatrix}$$

slične nad poljem kompleksnih brojeva.
(U slučaju da ste zaboravili (ili niste znali), $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$)

3. Ako je $A\simeq B$ pokazati da $A^k\simeq B^k$ za sve nenegativne cijele $k$.

4. Neka su $\mathcal{B}=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$ i $\mathcal{B}'=\{y_1,y_2,\dots,y_n\}$ baze za $n$-dimenzionalni podprostor $V\subseteq\mathbb{R}^m$ i neka su $X_{m\times n}$ i $Y_{m\times n}$ matrice čije su kolone vektori redom iz $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}'$.
(a) Objasniti zašto je $Y^TY$ nesingularna i dokazati da matrica za promjenu baze sa $\mathcal{B}$ u $\mathcal{B}'$ je

$$P=(Y^TY)^{-1}Y^TX.$$

(b) Opisati $P$ kada je $m=n$.

Rješenja:

1. $\mathcal{B}=\left\{\begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}\right\}$, $[T]_{\mathcal{S}}=\begin{pmatrix}-7&-15\\6&12\end{pmatrix}$, $Q=\begin{pmatrix}5&-3\\-3&2\end{pmatrix}$

2. $D=Q^{-1}RQ$, $Q=\begin{pmatrix}i&1\\1&i\end{pmatrix}$